

# Entropía Black Shells

**W. A. Rojas C. y R. Arenas S.**

XV LATIN AMERICAN REGIONAL IAU MEETING  
CARTAGENA DE INDIAS  
COLOMBIA

23 de septiembre de 2016

# Contenido

- 1 Motivación
- 2 Física de hipersuperficies
- 3 Formalismo de Darmois-Israel
- 4 Distancia propia  $\alpha$  sobre el horizonte
- 5 Acerca de los valores de las constantes  $C_1$  y  $C_2$
- 6 Termodinámica del Shell en contracción
- 7 Conclusiones I
- 8 Conclusiones II
- 9 Bibliography

# Introducción

Este estudio plantea las siguientes inquietudes

- 1 Estudiar la cinemáticas de hipersuperficies.
- 2 Plantear la entropía Bekenstein-Hawking  $S_{BH}$  para Black Shells.
- 3 Estudiar un modelo alternativo a modelo estándar de los AGN's

# Física de hipersuperficies

## Definición de Hipersuperficie como de tiempo o como de espacio

Consideremos una variedad riemanniana  $\mathcal{M}$  de dimensión  $(3 + 1)$  tal que una hipersuperficie  $\Sigma$  es una 3-dimensional superficie, con la condición que  $\Sigma \subset \mathcal{M}$ , y que puede ser como de tiempo, como de espacio o nula. Así,  $\Sigma$  puede ser especificada con una restricción de las coordenadas  $\Phi(x^\alpha) = 0$  cuyas ecuaciones paramétricas son de la forma

$$x^\alpha = x^\alpha(y^a), \quad (1)$$

$$n^\alpha n_\alpha = \epsilon = \begin{cases} -1 & \text{sí } \Sigma \text{ es como de espacio.} \\ +1 & \text{sí } \Sigma \text{ es como de tiempo.} \end{cases} \quad (2)$$

## Coordenadas intrínsecas $y^a$ y vector normal $n^\alpha$

Así, se tiene que  $y^a$ , ( $a = 1, 2, 3$ ) son las coordenadas intrínsecas de  $\Sigma$ . Se define el vector normal unitario  $n_\alpha$  de la forma

$$n^\alpha n_\alpha = \epsilon = \begin{cases} -1 & \text{sí } \Sigma \text{ es como de espacio.} \\ +1 & \text{sí } \Sigma \text{ es como de tiempo.} \end{cases} \quad (3)$$

# Primera y segunda formas fundamentales

## La métrica inducida

la métrica inducida sobre  $\Sigma$  se obtiene cuando se limitan los desplazamientos a tal hipersuperficie de la forma

$$ds_{\Sigma}^2 = h_{ab} dy^a dy^b, \quad h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^{\alpha} e_b^{\beta}. \quad (4)$$

Donde  $h_{ab}$  se conoce como la métrica inducida o primera forma fundamental y los vectores tangentes a las curvas integrales contenidas en  $\Sigma$  son de la forma

$$e_a^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^a}. \quad (5)$$

## Curvatura extrínseca $K_{ab}$

Se tiene que la curvatura extrínseca de  $\Sigma$  esta determinada por la derivada de Lie del tensor proyección a lo largo del campo vectorial normal

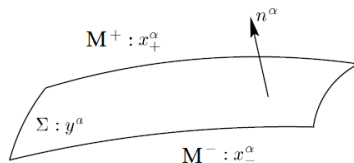
$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n g_{\mu\nu}.$$

Así, tenemos que  $K_{ab}$  queda determinada como

$$K_{ab} = n_{\alpha;\beta} e_a^{\alpha} e_b^{\beta}, \quad (6)$$

## Formalismo de Darmois-Israel

Sea hipersuperficie  $\Sigma$  divide el espacio-tiempo en dos regiones:  $M^+$  y  $M^-$ , tal que  $g_{\alpha\beta}^+ \in M^+$  y  $g_{\alpha\beta}^- \in M^-$



**Figura:** Dos regiones del espacio-tiempo que se juntan en una frontera común.

## Primera condición de juntura

La métrica inducida debe ser la misma en ambos lados de  $\Sigma$ , lo cual permite establecer la continuidad de la primera forma fundamental [2]

$$[h_{ab}] = 0. \quad (7)$$

## Segunda condición

La segunda condición de juntura establece que la curvatura extrínseca debe ser la misma en ambos lado de la hipersuperficie, lo cual garantiza la continuidad de la segunda forma fundamental

$$[K_{ab}] = 0. \quad (8)$$

Ambas condiciones son independientes de  $x^\alpha$ . En caso singular que (7) no sea nula, significa que el espacio-tiempo es singular en  $\Sigma$ , por lo que se tiene una hipersuperficie con un tensor superficial momentum-energía  $S_{ab}$

$$S_{ab} = -\frac{\epsilon}{8\pi} ([K_{ab}] - [K] h_{ab}). \quad (9)$$

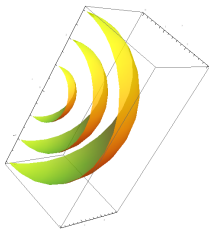
Se puede interpretar que cuando  $[K_{ab}] \neq 0$  solo cuando parte de  $R_{\alpha\beta}$  de  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  es singular y esta parte está asociada con la materia

## Distancia propia $\alpha$ sobre el horizonte

### Espacio-tiempo al exterior de un Black Shell

Se tiene que para un observador asintóticamente lejano de acuerdo al modelo de Black Shell, el espacio-tiempo que rodea al shell contrayéndose es de la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad f(r) = 1 - \frac{2m}{r}. \quad (10)$$



**Figura:** Shell contrayéndose cerca del horizonte desde el infinito hasta cerca del horizonte.



## Cinemática del shell en contracción

Para un observador lejano, el cascarón esférico delgado de masa  $m$ , que se contrae desde el infinito  $r_0$  hasta cerca del horizonte  $r_s$  es de la forma

$$r(t) = r_s + \Delta r e^{-t/\tau}, \quad \Delta r = r_0 - r_s, \quad r_s = \frac{2Gm}{c^2}, \quad \tau = \frac{4Gm}{3c^3}. \quad (11)$$

## Entropía del sistema

En el modelo de Brick Wall revisado por Mukohyama-Israel la entropía surge de los campos cuánticos calientes cerca del horizonte una vez se ha formado el agujero negro. Bajo la condición que tal entropía es de la misma forma para el modelo de Black Shell para un observador asintóticamente lejano

$$S = \int_{Vol} s dV, \quad s = \beta(\rho + P) = \frac{4NT^3}{\pi^2}, \quad (12)$$

donde  $N$  es el número de especies,  $T$  corresponde a la temperatura local dada por la Ley de Tolman

$$T(r) = \frac{T_\infty}{\sqrt{f(r)}} \quad (13)$$

Por lo que se halla que la entropía de los campos térmicos cerca del radio gravitacional es

$$S = \frac{4N}{\pi^2} \left( \frac{T_\infty^3}{\kappa_0^2} \right) \frac{A_{\mathcal{H}}}{4} \frac{1}{\Delta r} \left[ \frac{1}{\tau} \int_0^{t_u} e^{t/\tau} dt \right], \quad C_1 = \frac{1}{\tau} \int_0^{t_u} e^{t/\tau} dt. \quad (14)$$

Por otro lado, se tiene que la distancia propia  $\alpha$  sobre el horizonte esta dada como

$$\alpha = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{f(r)}} = \frac{1}{\tau} \int_0^{t_u} \frac{\Delta r e^{-t/\tau}}{\sqrt{2\kappa_0 \Delta r e^{-t/\tau}}} dt = \sqrt{\frac{\Delta r}{2\kappa_0}} \left[ \frac{1}{\tau} \int_0^{t_u} e^{-t/\tau} dt \right], \quad (15)$$

donde

$$C_2 = \frac{1}{\tau} \int_0^{t_u} e^{-t/\tau} dt. \quad (16)$$

De lo anterior se tiene que la entropía para los campos térmicos cerca del radio gravitacional es

$$S_{shell} = \left[ \frac{N}{90\pi\alpha^2} \left( \frac{T_\infty}{\kappa/2\pi} \right)^3 \frac{A}{4} \right] \frac{C_1 C_2^2}{4}, \quad \alpha = l_P \sqrt{\frac{C_1 C_2^2 N}{360\pi}} \quad (17)$$

## Acerca de los valores de las constantes $C_1$ y $C_2$

Un observador asintóticamente lejano aprecia que una partícula cae radialmente en un agujero negro queda descrito por la ecuación

Ecuación para una partícula que cae radialmente en un agujero negro medida por un observador externo

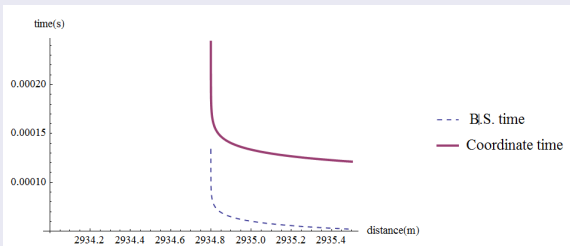
$$ct(r) = r_s \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{r_0}{r_s} - 1} + \sqrt{\frac{r_0}{r} - 1}}{\sqrt{\frac{r_0}{r_s} - 1} - \sqrt{\frac{r_0}{r} - 1}} \right|$$

$$+ r_s \sqrt{\frac{r_0}{r_s} - 1} \left[ \left( \frac{r_0}{2r_s} + 1 \right) \arccos \left( \frac{2r}{r_0} - 1 \right) + \frac{r_0}{r_s} \sqrt{\frac{r}{r_0} + \left( \frac{r}{r_0} \right)^2} \right]. \quad (18)$$

Ecuación para una partícula que se mueve comóvil al shell medida por un observador externo

$$r(t) = r_s + \Delta r e^{-t/\tau} \longrightarrow t(r) = \tau \ln \left| \frac{r_0 - r_s}{r - r_s} \right|. \quad (19)$$

## Cinemática del shell en contracción



**Figura:** Comportamiento de una partícula que cae radialmente hasta cerca de su radio gravitacional  $r_s$  de acuerdo a las expresiones (18) y (19). La Figura muestra el comportamiento de las funciones  $t(r)$  para ambas expresiones.

$$C_1 = -\Delta r \int_{r_0}^{r_s + \epsilon} \frac{1}{(r - r_s)^2} dr = \frac{r_0 - r_s - \epsilon}{\epsilon} = \frac{\Delta r}{\epsilon} - 1. \quad (20)$$

El análisis físico de (20) no se puede realizar a priori, dado que los valores que pueden tomar son distintos ordenes de magnitud

$$r_0 \sim 10^{23} m, \text{ distancia a M87, } r_s \sim 10^3 m \text{ y } \epsilon \sim 10^{-35} m,$$

### Valor de $C_2$

cerca del horizonte se tiene que el valor de  $C_1$

$$C_1(r_s + \epsilon) = 1. \quad (21)$$

Valor de  $C_2$ 

integrando

$$C_2 = -\frac{1}{\Delta r} \int_{r_0}^{r_s+\epsilon} dr = 1 - \frac{\epsilon}{\Delta r} \quad (22)$$

cerca del horizonte se tiene que el valor de  $C_2$ 

$$C_2(r_0 + \epsilon) = 2 \quad (23)$$

Consideremos el cociente de la forma  $\frac{C_1}{C_2}$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\Delta r}{\epsilon}, \quad (24)$$

que es equivalente a

$$\epsilon = \frac{C_2}{C_1} \Delta r. \quad (25)$$

Es importante, recordar que  $C_2|_{r_s+\epsilon} = 2$  y  $C_1|_{r_s+\epsilon} = 1$

por lo que posible definir una constante  $n|_{r_s+\epsilon}$  como

$$n|_{r_s+\epsilon} = \left( \frac{C_2}{C_1} \right)_{r_s+\epsilon} = 2. \quad (26)$$

Por lo que se tiene que el mínimo valor que  $\epsilon$  puede adoptar en la vecindad del horizonte es

$$\epsilon|_{r_s+\epsilon} = n \Delta r = 2 \Delta r \quad (27)$$

En este análisis debemos tener en cuenta que tales constantes tienen su origen en la cinemática del Black Shell.

## Termodinámica del Shell en contracción

Una vez especifica la entropía del shell en contracción  $S_{shell}$ , es factible calcular algunos parámetros termodinámicos del shell con la receta estándar

$$S_{shell} = \frac{N\pi^2}{180\alpha^2} \left( \frac{T_\infty^3}{\kappa^3} \right) AC_1 C_2^2. \quad (28)$$

La energía interna de la forma

$$dE = dF + T_\infty dS,$$
$$E = \frac{N\pi^2}{240\alpha^2} \left( \frac{T_\infty^4}{\kappa^3} \right) AC_1 C_2^2. \quad (29)$$



La capacidad calorífica a volumen constante  $C_V = C_P$  como

$$C_V = \left( \frac{\partial E}{\partial T_\infty} \right)_V, \quad C_P = T_\infty \left( \frac{\partial S}{\partial T_\infty} \right)_P,$$

de lo que se obtiene

$$C_V = C_P = \frac{N\pi^2}{60\alpha^2} \left( \frac{T_\infty^3}{\kappa^3} \right) AC_1 C_2^2. \quad (30)$$

La presión interna del shell,  $P$  como

$$P = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T_\infty} = - \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial F}{\partial A} \right)_{T_\infty}$$

de lo que se obtiene

$$P = \frac{N\pi^2}{720\alpha^3} \left( \frac{T_\infty^3}{\kappa^3} \right) C_1 C_2^2. \quad (31)$$

# Conclusiones I

Del presente estudio se extractan las siguientes conclusiones

- 1 El presente modelo es una alternativa al modelo de AGNs dado que un Black Shell para un observador externo se comporta como un agujero negro, dado que espacio-tiempo al exterior del Black Shell es el mismo al que de un agujero negro.
- 2 Se estableció que la distancia propia  $\alpha$  a partir del Formalismo de Darmois-Israel, el modelo entropía propuesto por Mokohyama-Israel es de la forma

$$\alpha = l_P \sqrt{\frac{C_1 C_2^2 N}{360\pi}} \quad (32)$$

## Conclusiones II

- 1 Se determinaron las constantes  $C_1$  y  $C_2$  de la forma

$$C_1 = \frac{1}{\tau} \int_0^{t_u} e^{t/\tau} dt, \quad C_2 = \frac{1}{\tau} \int_0^{t_u} e^{-t/\tau} dt. \quad (33)$$

Tal que cerca del horizonte

$$C_1|_{r_s+\epsilon} = 1, \quad C_2|_{r_s+\epsilon} = 2.$$

Aún estamos por establecer que parametros fisicos observacionales permiten establecer los valores de  $C_1$  y  $C_2$  .

- 2 Es interesante ver que la cinemática del Black Shell coincide con la de una partícula que cae radialmente en un agujero negro para tiempo muy largos.

# Referencias



G. Portilla. Tesis de doctorado: LA REGION DE LINEAS CORONALES EN GALAXIAS SEYFERT 1 Y SEYFERT 2. Director: Juan Manuel Tejeiro S. Universidad Nacional de Colombia. 2011  
<http://www.bdigital.unal.edu.co/6224/1/183135.2011.pdf>



E. Poisson. A Relativist's Toolkit The Mathematics of Black-Hole Mechanics. Cambridge University Press. 2007.



Sean Carroll. Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity .Cummings. 2003.



R. Canonico. Phd Thesis: Exact Solutions in General Relativity and Alternative Theories of Gravity: mathematical and physical properties. UNIVERSITA DEGLI STUDI DI SALERNO.Dipartimento di Fisica E. R. Caianiello. 2010. <http://elea.unisa.it/bitstream/handle/10556/181/tesi%20R.%20Canonico.pdf?sequence=1>



J. R. Arenas and F. Castro O. Euclidean Approach for Entropy of Black Shells. arXiv: [gr-qc] 1606.06786



F. Pretorius, D. Vollick, W. Israel. Phys.Rev. D57 (1998) 6311-6316 arXiv: [gr-qc]9712085



Mukohyama, Shinji et al. Phys.Rev. D58 (1998) 104005. arXiv: [gr-qc]9806012 YITP-98-35